Pour une approche locale de la fatigue : proposition d'une conceptualisation et d'une classification des problèmes de fatigue

Alain Thionnet

Pour une approche locale de la fatigue : proposition d'une conceptualisation et d'une classification des problèmes de fatigue

For a local approach to fatigue : proposal of the conceptualization and classification of problems related to fatigue

A. Thionnet[1,2]

1 - Mines ParisTech, Centre des Matériaux, CNRS UMR 7633, BP 87, 91003 Evry cedex, France
e-mail : alain.thionnet@ensmp.fr
2 - Université de Bourgogne, Mirande, BP 47870, 21078 Dijon, France
e-mail : alain.thionnet@u-bourgogne.fr

Résumé

Dans cette étude, on propose de conceptualiser et de classifier les problèmes de calcul de structures dits de fatigue (dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement). Parce que le concept de fatigue est avant tout un concept que l'on peut estimer structural plutôt que local, cette classification est faite d'abord sur des grandeurs structurales. Ensuite, on donne une classification faite sur des grandeurs locales. L'objectif de ces classifications est de favoriser la résolution locale des problèmes de fatigue d'une classe donnée en aidant à la justification du passage des lois d'évolution obtenues par la Thermodynamique à celles écrites dans le cadre de la fatigue.

Abstract

In this study, conceptualization and classification of fatigue problems (in the framework of the Damage Mechanics) are made. Structural loadings induce a local temporal evolution of the "leading" state variable but not vice versa. This argument demonstrates why we should first classify fatigue problems by using structural quantities. The evolution laws, however, are written on the local level : therefore, we provide a classification of fatigue problems based on local quantities. Our ultimate aim is to help to justify a local form of a fatigue evolution law starting from its quasistatic form deduced from Thermodynamics.

Mot Clés : endommagement, détection, émission acoustique, rupture de fibre, fissuration
Keywords : damage, detection, acoustic emission, fibre break, microcracks

1 Pourquoi conceptualiser et classifier les problèmes de fatigue ?

Afin d'être réalisés dans des délais de temps raisonnables, les calculs de structures (non linéaires) se limitent en général à ne résoudre qu'un petit nombre d'itérations temporelles. Si l'on prend l'exemple de l'industrie aéronautique, certaines pièces d'hélicoptère sont dimensionnées pour avoir une durée de vie comprise entre 10^6 et 10^9 cycles de charge/décharge. Dans ce cas, le schéma numérique de résolution en temps devrait résoudre au moins entre 10^7 et 10^{10} itérations. Si on imagine qu'une itération (un calcul sur la structure industrielle complète) est résolue en une seconde (ce qui peut être très loin de la vérité), alors le calcul durerait entre 100 jours et 300 ans : même la borne inférieure de cet exemple minimaliste n'est pas envisageable pour un calcul de structure industrielle. L'ajout du vocable fatigue à un problème de calcul de structures, tel que nous l'entendons ici, a pour but essentiel de modifier l'écriture des lois d'évolution des phénomènes de manière à rendre leur intégration accessible dans des délais de temps raisonnables pour un calcul industriel.

Considérons un modèle de comportement de matériau écrit dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement et de la Thermodynamique des Milieux Continus qui prend en compte un ensemble de phénomènes physiques décrits par un ensemble de variables d'état dont on distingue les variables internes regroupées symboliquement dans l'ensemble V_{EI} et la variable d'état externe "pilote" supposée 2-tensorielle notée Q (usuellement le 2-tenseur symétrique des déformations). Pour un phénomène physique donné, dont a désigne l'une des variables d'état qui rentre dans le cadre de sa modélisation, on peut montrer que la loi d'évolution (au point M) de cette variable peut s'écrire sous la forme (Eq. 1) où Φ_a est une fonction relative à la variable a et au phénomène physique considéré. Cette forme n'est pas la plus générale que l'on peut rencontrer mais suffit pour l'heure à l'illustration de notre discours. On peut la justifier en disant qu'elle résulte en fait de la réécriture du système différentiel qui donne l'évolution de chaque variable d'état interne en fonction de la variable d'état "pilote" (éventuellement couplée avec celle des autres variables d'état internes) et si nécessaire du Théorème des Fonctions Implicites. Dans le cadre de la fatigue, on rencontre fréquemment dans la littérature la loi d'évolution locale, au point M, de ce même phénomène sous la forme (Eq. 2) où $\bar{\Phi}_a$ est une fonction relative à la variable a et au phénomène physique considéré, N désigne le nombre de cycles et $\mathbb{P}$ est un ensemble de paramètres.

$$da(M,t)/dt = \Phi_a(Q(M,t), V_{EI}(M,t))dQ(M,t)/dt \tag{1}$$

$$da(M,N) = \bar{\Phi}_a(\mathbb{P}, Q(M,N), V_{EI}(M,N))dN \tag{2}$$

Si on admet que la forme de la loi d'évolution donnée par l'équation (Eq. 1) est "exacte", la forme donnée par l'équation (Eq. 2) ne peut en être a priori qu'une forme approchée : sauf cas particuliers, la substitution de Q, variable d'état tensorielle, par N, qui n'est une variable ni tensorielle ni d'état, ne peut qu'induire une perte d'information. L'examen de la littérature [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15] dans le domaine de la fatigue non seulement des matériaux (qu'ils soient composites ou métalliques) mais aussi des structures met en évidence qu'en général peu, voire aucune justification n'est donnée quant à l'obtention des lois locales de fatigue ni même quant à leur utilisation pour des calculs de structures dans le cadre de la fatigue. On constate également que ces mêmes lois ne sont parfois pas valides parce qu'elles utilisent un ensemble de paramètres (ici mentionné par $\mathbb{P}$) d'origine structurale (par exemple, celui que l'on qualifie de rapport de charge) qui n'a aucune raison de se transmettre au niveau local sans distorsion. Ces deux défauts sont révélateurs du fait que des questions qui peuvent avoir une réponse simple dans le cas de problèmes de calcul de structures quasi-statiques peuvent devenir insurmontables dès lors que le vocable de fatigue y est associé. Cela souligne combien la notion de fatigue est, dans toute sa généralité, un problème complexe. Répondre à la question "qu'est-ce qu'un problème de calcul de structures de fatigue ?" est la première motivation de la conceptualisation et des classifications que nous souhaitons proposer des problèmes de calcul de structures auxquels on associe le vocable de fatigue. La seconde est de faire en sorte que cette classification favorise la recherche de la résolution de ces problèmes les plus généraux tenant compte notamment du caractère tridimensionnel et non uniforme des états locaux de contraintes et de déformations. Les sollicitations structurales induisent l'évolution temporelle locale de la variable d'état "pilote" et non l'inverse. Cet argument justifie que l'on propose d'abord une classification des problèmes de fatigue à partir de critères structuraux. C'est l'objet de la première partie de cet article. Parce que les lois d'évolution sont écrites au niveau local et que ces critères structuraux ne sont pas a priori transmis sans distorsion au niveau local, la seconde partie de cet article donne une classification des problèmes de fatigue qui repose sur des critères locaux.

Notre propos n'est pas que ces classifications induisent ou donnent directement les clés de cette résolution générale quels que soient les matériaux et les phénomènes physiques (nous en serions d'ailleurs incapable). Néanmoins, ces classifications doivent aider à cerner ce qu'il doit figurer ou non dans les lois d'évolution de de fatigue des problèmes d'une classe donnée. Elles doivent également aider à la justification rarement faite du passage des lois d'évolution obtenues par la Thermodynamique à celles écrites dans le cadre de la fatigue. Il convient enfin de noter que nous ne souhaitons pas résoudre les problèmes de fatigue en modélisant un "microphénomène" dont la coalescence aboutirait au phénomène physique de fatigue initialement considéré et gouverné par une loi locale de la forme (Eq. 1). Ici, nous souhaitons résolument que les lois de fatigue soient écrites sous la forme (Eq. 2).

2 Convention de langage et d'écriture et quelques définitions générales

L'objet de l'étude, du point de vue mathématique, va porter essentiellement sur l'examen de la dépendance temporelle (au travers de la variable indiquant le temps, notée t) de différentes fonctions définies et/ou construites dépendant aussi d'une variable d'espace (le point M de l'espace affine modélisant l'espace physique). Pour cette raison :

- la précision du point M comme argument des fonctions considérées sera faite uniquement pour indiquer que l'on travaille avec des champs (que l'on suppose réguliers par rapport aux variables scalaires spatiales contenues dans l'indication du point M) car aucune propriété ou opération (différentiation, par exemple) n'est particulièrement requise ici par rapport aux variables d'espace ;
- toutes les indications/définitions qui seront nécessaires relativement à la dépendance temporelles des fonctions considérées seront formulées comme si ces fonctions n'étaient dépendantes que du temps.

Ainsi, par exemple, la mention des bornes d'une fonction sera implicitement entendue comme étant relative aux bornes temporelles. Les notions de continuité et de dérivabilité seront elles aussi implicitement entendues comme étant relatives à la variable t.

Enfin, on donne un vocabulaire général relatif à des fonctions dépendant du temps (qui sera plus spécifiquement adapté dans la suite). Considérons une fonction $f(t)$ non constante dépendant du temps (régulière autant que nécessaire) définie sur l'intervalle I. On note f_{min} et f_{max} ses bornes. On dira que $f(t)$ est cyclique si dans l'intervalle de temps où elle est définie, on trouve des sous-intervalles où elle est se répète à l'identique. On dira que $f(t)$ est périodique si la réunion des sous-intervalles précédents est égale l'intervalle de temps où elle est définie. On appelle $c[f](t)$ le cycle élémentaire de f que l'on définit comme la restriction de la fonction considérée sur le sous-intervalle qui définit sa période $T[f]$. On dira que deux fonctions dépendant du temps $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont identiques s'il existe deux réels non nuls $\overline{f}_1$ et $\overline{f}_2$ tels que $f_1(t)/\overline{f}_1 = f_2(t)/\overline{f}_2 = V(t)$.

Hypothèses (H1) (H2) - On définit deux hypothèses nécessaires aux classifications qui vont être faites. La première (H1) suppose que le cycle élémentaire de la fonction considérée si elle est périodique ne possède aucun extrémum autres que ceux définis par ses bornes (elle évolue donc de manière monotone entre ses bornes). La seconde (H2) suppose que le cycle élémentaire de la fonction considérée vérifie l'hypothèse (H1), est symétrique par rapport à sa demi-période et qu'il évolue de manière linéaire entre ses bornes.

3 Classification des problèmes de fatigue selon des critères structuraux

On considère un système matériel en mouvement dans l'espace physique ε^3 rapporté à un repère galiléen. Le système coïncide au cours du temps avec le domaine $D(t) = \Omega(t) \cup \partial\Omega(t)$. $D(t)$ est un ensemble connexe par arc fermé borné de l'espace affine qui modélise ε^3, $\Omega(t)$ désigne son intérieur et $\partial\Omega(t)$ sa frontière supposée régulière. L'évolution de $D(t)$ est étudiée entre les instants t_0 et t_{MAX}. Les sollicitations appliquées à $D(t)$ peuvent être une densité volumique d'effort agissant dans $\Omega(t)$ et des actions de contact agissant sur $\partial\Omega(t)$. Le problème de calcul de structures, noté (P), posé sur le système consiste à trouver les champs de déplacement et des variables d'état incluses dans la modélisation du milieu constitutif du domaine, vérifiant l'équation d'équilibre local usuel au point M et la loi de comportement du milieu (l'ensemble des lois d'état et d'évolution), sous des conditions aux limites données. Ce problème est qualifié de problème standard. On considère deux instants t_a et t_b ($t_0 \leq t_a < t_b \leq t_{MAX}$) qui définissent l'intervalle de temps I. On note $S(t_a, t_b)$ (respectivement, $S_c(t_a, t_b)$ et $S_t(t_a, t_b)$) l'ensemble de toutes les composantes des champs de vecteurs qui définissent les sollicitations du problème (P) (respectivement, qui sont constantes et non constantes) au cours du temps, entre les instants t_a et t_b. On note respectivement n, n_c et n_t le cardinal de chacun de ces ensembles. On a : $S(t_a, t_b) = S_c(t_a, t_b) \cup S_t(t_a, t_b)$. On note $s_\alpha(M)$ un élément quelconque de $S_c(t_a, t_b)$ et $s_\alpha(M, t)$ un élément quelconque de $S_t(t_a, t_b)$. On a : $S_t(t_a, t_b) = \{s_\alpha(M, t)_{\alpha=1,\dots,n_t}\}$. On suppose que les fonctions $s_\alpha(M,t)$ sont des fonctions continues et dérivables sur leur domaine de définition. On note $\mathbb{S}_t(t_a,t_b)$ l'ensemble des grandeurs nécessaires à la connaissance de l'ensemble $S_t(t_a,t_b)$.

On définit maintenant ce qu'est un problème de fatigue.

Définition - Problème de fatigue. On dira que le problème posé est un problème de fatigue sur l'intervalle de temps I, si l'évolution temporelle de tous les éléments de $S_t(t_a,t_b)$ est cyclique sur l'intervalle de temps I.

La généralité des problèmes induits par cette définition est importante et il est difficile de la distinguer significativement de celle des problèmes standards et d'en extraire des caractéristiques relatives à la notion de fatigue. Par exemple, si deux sollicitations sont périodiques avec des périodes dans un rapport non rationnel, définir la notion de cycle peut s'avérer difficile. Une simplification possible est de supposer que les sollicitations sont identiques.

On construit ainsi la classification à partir des grandeurs structurales en utilisant le fait que les sollicitations peuvent être périodiques, vérifier les hypothèses (H1) et (H2) et être identiques. On définit 6 classes de problèmes de fatigue allant de la plus générale à la moins générale : SP, SPI, SPM, SPMI, SPML et SPMLI (Tab. 1). La notion d'être plus oui moins générale est entendue par rapport au contenu plus ou moins important de l'ensemble $\mathbb{S}_t(t_a,t_b)$. On a :

– $\mathbb{S}_t(t_a,t_b) = S_t(t_a,t_b) = \{s_\alpha(M,t)_{\alpha=1,\ldots,n_t}\}$ pour les problèmes de fatigue (quelconques) ;
– $\mathbb{S}_t(t_a,t_b) = \{(T[s_\alpha(M,t)](M), s_{\alpha\, min}(M), s_{\alpha\, max}(M))_{\alpha=1,\ldots,n_t}\}$ pour les problèmes SPML ;
– $\mathbb{S}_t(t_a,t_b) = \{T[V(t)], V_{min}, V_{max}, (\overline{s}_\alpha(M))_{\alpha=1,\ldots,n_t}\}$ pour les problèmes SPMLI.

Problème / $s_\alpha(M,t)_{\alpha=1,\ldots,n_t}$	Périodiques	Hypothèse (H1)	Hypothèse (H2)	Identiques
SP	X			
SPI	X			X
SPM	X	X		
SPMI	X	X		X
SPML	X	X	X	
SPMLI	X	X	X	X

TAB. 1 – Classification des problèmes de fatigue mécanique construite sur des grandeurs structurales

4 Classification des problèmes de fatigue à partir de critères locaux

Le pouvoir particulier que nous souhaitons attribuer ici au concept de fatigue est celui d'imposer que les lois locales d'évolution soient écrites en utilisant comme variable d'intégration, non plus la variable associée au temps, mais celle associée au nombre d'application d'une ou plusieurs sollicitations répétitives. De ce fait, l'intégration numérique de ces lois supprime les itérations temporelles inscrites au sein de la notion de cycle et les temps de calcul sont diminués. Il ne faut toutefois pas que l'abaissement du temps de calcul se fasse au détriment de la qualité de la prévision. En effet, par exemple, une sollicitation appliquée un même nombre de fois aura a priori un effet différent si elle est forte ou faible. C'est la raison pour laquelle les lois d'évolution (Eq. 2) écrites en fatigue doivent prendre en compte les caractéristiques (structurales ou locales) induites par les sollicitations structurales et être justifiées à partir de leur forme originelle (Eq. 1). Réaliser ceci dans le cadre des problèmes de fatigue les plus généraux semble difficile. C'est la raison pour laquelle on a construit une première classification des problèmes de fatigue : parce que ce sont les sollicitations structurales qui induisent les évolutions locales, cette classification repose sur ces sollicitations et donc sur des critères structuraux. Toutefois, parce que ce sont les lois locales d'évolution qui devront être finalement résolues, la suite de la classification que l'on propose est réalisée à l'aide de critères construits sur des grandeurs locales.

L'intérêt du concept de fatigue au niveau local (au point M) (tel que nous l'envisageons ici) est de pouvoir écrire les lois d'évolution des variables d'état internes d'un modèle de comportement sous une forme déduite de la Thermodynamique des Milieux Continus (qui peut être (Eq. 1)) mais en s'affranchissant de la connaissance de la loi horaire complète de la variable "pilote", au profit d'une variable associée à la répétitivité de son évolution et d'éléments caractéristiques de cette loi horaire. Cette loi d'évolution dite de fatigue prend alors au final la forme générale (Eq. 2).

La prise en compte de ces éléments caractéristiques doit permettre de ne pas perdre l'identité de la loi horaire réelle de la variable "pilote" (la fonction $s_\alpha(M,t)$ identifiant une sollicitation de manière unique, il faut que la description de cette même sollicitation au travers de ses caractéristiques soit bi-univoque dans $\mathbb{S}_t(t_a,t_b)$) et repose évidemment sur les sollicitations imposées par le milieu extérieur. On justifie ainsi une nouvelle fois de la nécessité de construire d'abord une classification des problèmes de fatigue basée sur les sollicitations structurales donc des critères structuraux. S'il est aisé de vérifier ces critères structuraux, en revanche, il est moins aisé de répondre à la question de savoir si tous ou partie de ces critères se transmettent sans distorsion au niveau local à la variable "pilote". La seconde partie de cet article va construire une classification des problèmes de fatigue sur la base de critères locaux susceptible d'aider à donner une réponse à cette question.

Pour construire la classification à partir de grandeurs locales, d'autres définitions sont nécessaires.

Définition - Composantes actives de la variable "pilote". Soit $Q(M,t)$ la variable pilote supposée 2-tensorielle utilisée dans la modélisation d'un phénomène. Ses composantes sont notées $(Q_{ij}(M,t))_{i,j=1,2,3}$. On note $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$ les composantes de $Q(M,t)$ présentes dans la loi d'évolution du phénomène considéré. On appelle composantes actives de la variable "pilote", les composantes $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$.

Définition - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques d'une composante active de la variable "pilote". On appellera ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la composante active $Q^*_{ij}(M,t)$ de la variable "pilote", sur l'intervalle I, l'ensemble $\mathbb{Q}^{*(ij)}(t_a,t_b,M)$ des grandeurs nécessaires à la connaissance de $Q^*_{ij}(M,t)$ sur l'intervalle I.

Définition - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable "pilote". On appellera ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable "pilote", sur l'intervalle I, l'ensemble $\mathbb{Q}^*(t_a,t_b,M)=\bigcup_{i,j}\mathbb{Q}^{*(ij)}(t_a,t_b,M)$.

Afin de réaliser la classification au niveau local que nous souhaitons, le concept de problème local de fatigue doit être défini en préambule. Ensuite, suivant une terminologie similaire à celle utilisée pour la classification faite au niveau structural, différentes classes de problèmes locaux de fatigue pourront être construites.

Définition - Problème local de fatigue. Le problème posé est un problème local de fatigue, au point M, sur l'intervalle I, si l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable "pilote" est cyclique, au point M, sur l'intervalle I.

A partir de cette définition, on construit le début de la classification à partir des grandeurs locales en utilisant le fait que les composantes $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$ peuvent être périodiques, vérifier les hypothèses (H1) et (H2) et être identiques (entre elles, au niveau local). On définit ainsi 6 classes de problèmes locaux de fatigue allant de la plus générale à la moins générale (PP, PPI, PPM, PPMI, PPML et PPMLI, Tab. 2) identifiée par leur ensemble caractéristique $\mathbb{Q}^*(t_a,t_b,M)$. On a :

- $\mathbb{Q}^*(t_a,t_b,M)=\left\{(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$ pour les problèmes locaux de fatigue (quelconques) ;
- $\mathbb{Q}^*(t_a,t_b,M)=\left\{(T[Q^*_{ij}(M,t)](M),Q^*_{ij\,min}(M),Q^*_{ij\,max}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$ pour les problèmes PPML ;
- $\mathbb{Q}^*(t_a,t_b,M)=\left\{T[V^*(M,t)](M),V^*_{min}(M),V^*_{max}(M),(\overline{Q^*_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$ pour les problèmes PPMLI.

Problème / $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$	Périodiques	Hypothèse (H1)	Hypothèse (H2)	Identiques
PP	X			
PPI	X			X
PPM	X	X		
PPMI	X	X		X
PPML	X	X	X	
PPMLI	X	X	X	X

TAB. 2 – Classification des problèmes locaux de fatigue mécanique

Les définitions qui viennent d'être données imposent l'examen de chaque point M du domaine Ω qui définit la géométrie de la structure étudiée et pour laquelle se pose le problème de la fatigue. Afin de pouvoir appliquer les définitions précédentes non plus à un point mais à un sous-ensemble de points ω (connexe par arc ou non) de l'ensemble Ω, on définit un nouveau concept de problème de fatigue : un problème local de fatigue sur un domaine. Pour cela, le concept de problème local de fatigue sur un domaine est guidé par l'idée que la loi horaire des composantes $Q^*_{ij}(M,t)$ peut être indépendante du point considéré (sur $\omega \subset \Omega$). Cela va induire une propriété mathématique intéressante sur les composantes $Q^*_{ij}(M,t)$: elles doivent être à variables séparables (sur $\omega \subset \Omega$).

Définition - Problème local de fatigue sur un domaine. Le problème posé est un problème local de fatigue, sur le domaine ω (inclus dans Ω), sur l'intervalle I, si quel que soit le point M de ω, on est en présence d'un problème local de fatigue, au point M, sur l'intervalle I, pour lequel pour toutes les composantes $Q^*_{ij}(M,t)$, il existe un réel $q^*_{ij}(M)$ et une même fonction $V^{*(ij)}(\omega,t)$ tels que : $Q^*_{ij}(M,t) = V^{*(ij)}(\omega,t)q^*_{ij}(M)$.

On peut alors étendre sans difficulté les définitions des problèmes locaux de fatigue et dans un premier temps celles des ensembles des paramètres locaux caractéristiques.

Définition - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques sur un domaine d'une composante active de la variable "pilote". On appellera ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la composante $Q^*_{ij}(M,t)$ de la variable "pilote", sur le domaine ω, sur l'intervalle I, l'ensemble $\mathbb{Q}^{*(ij)}(t_a,t_b,\omega)$ des grandeurs nécessaires à la connaissance de $Q^*_{ij}(M,t)$ sur le domaine ω, sur l'intervalle I.

Définition - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques sur un domaine des composantes actives de la variable "pilote". On appellera ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable "pilote", sur le domaine ω, sur l'intervalle I, l'ensemble $\mathbb{Q}^*(t_a,t_b,\omega) = \bigcup_{i,j}\mathbb{Q}^{*(ij)}(t_a,t_b,\omega)$.

On construit donc la suite de la classification à partir des grandeurs locales en utilisant le fait que les fonctions $V^{*(ij)}(\omega,t)(i,j) \in \{1,2,3\}^2$ peuvent être périodiques, vérifier les hypothèses (H1) et (H2) et être identiques (entre elles). On définit ainsi 6 classes de problèmes locaux de fatigue sur un domaine allant de la plus générale à la moins générale (PP(ω), PPI(ω), PPM(ω), PPMI(ω), PPML(ω) et PPMLI(ω), Tab. 3) identifiée par leur ensemble caractéristique $\mathbb{Q}^*(t_a,t_b,\omega)$. On a :

- $\mathbb{Q}^*(t_a,t_b,\omega) = \left\{(q^*_{ij}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, (V^{*(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$ pour les problèmes locaux de fatigue (quelconques) sur un domaine ;
- $\mathbb{Q}^*(t_a,t_b,\omega) = \left\{(q^*_{ij}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, (T[(V^{*(ij)}(\omega,t)](\omega), V^{*(ij)}_{min}(\omega), V^{*(ij)}_{max}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$ pour les problèmes PPML(ω) ;
- $\mathbb{Q}^*(t_a,t_b,\omega) = \left\{(q^*_{ij}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, T[(V^*(\omega,t)](\omega), V^*_{min}(\omega), V^*_{max}(\omega), (\overline{q^*_{ij}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$ pour les problèmes PPMLI(ω).

Problème / $V^{*(ij)}(\omega,t)(i,j) \in \{1,2,3\}^2$	Périodiques	Hypothèse (H1)	Hypothèse (H2)	Identiques
PP(ω)	X			
PPI(ω)	X			X
PPM(ω)	X	X		
PPMI(ω)	X	X		X
PPML(ω)	X	X	X	
PPMLI(ω)	X	X	X	X

TAB. 3 – Classification des problèmes locaux de fatigue mécanique sur un domaine

5 Pertinence des classifications locales réalisées. Concept de problème local de fatigue approché. Suite et fin de la classification des problèmes locaux de fatigue à partir de grandeurs locales

La classification faite à partir des sollicitations structurales a défini des classes de problèmes susceptibles d'exister réellement puisque c'est l'Expérimentateur (l'Extérieur du système étudié) qui impose l'évolution temporelle des sollicitations. Concernant la classification faite à partir des sollicitations locales (la variable "pilote"), les choses sont bien moins simples. En effet, les redistributions du champ local de la variable "pilote" (contrainte, déformation...) induits par les évolutions locales des variables internes empêchent, sauf cas exceptionnels, que les composantes $Q^*_{ij}(M,t)$ soient réellement périodiques sur un intervalle de temps donné. Cette remarque oblige donc à la création de classes de problèmes locaux de fatigue (ou locaux par domaine) plus réalistes qui nécessite au préalable de définir des fonctions susceptibles de remplacer les composantes actives "réelles" $Q^*_{ij}(M,t)$ de la variable "pilote". Ces fonctions qui seront choisies "parfaitement" périodiques seront appelées les composantes approchées des composantes actives de la variable "pilote". Elles remplaceront les composantes actives "réelles" $Q^*_{ij}(M,t)$ au sein de la loi d'évolution de fatigue par exemple, justifiant et autorisant ainsi l'emploi de cette loi, et donneront naissance aux différentes classes de problèmes de fatigue dits approchés.

Définition - Composantes actives approchées de la variable "pilote". La composante $Q^{*+}_{ij}(M,t)$ est une composante active approchée , au point M, sur l'intervalle I, de la composante $Q^*_{ij}(M,t)$, au sens du critère $c(t_a,t_b,Q^*_{ij},Q^{*+}_{ij},M)$, si et seulement si, $c(t_a,t_b,Q^*_{ij},Q^{*+}_{ij},M) \leq c_{MAX}$ (c_{MAX} étant un nombre réel positif donné).

Le critère $c(t_a,t_b,Q^*_{ij},Q^{*+}_{ij},M)$ peut prendre par exemple la forme suivante :

$$c(t_a,t_b,Q^*_{ij},Q^{*+}_{ij},M) = \frac{\int_{t_a}^{t_b} |Q^*_{ij}(M,t) - Q^{*+}_{ij}(M,t)|dt}{\int_{t_a}^{t_b} |Q^*_{ij}(M,t)|dt}$$

L'ensemble des concepts et des définitions qui ont été développés pour les composantes actives, peuvent s'étendre au cas des composantes actives approchées. On définit ainsi notamment les ensembles des paramètres caractéristiques $\mathbb{Q}^{*+}(t_a,t_b,M)$ et $\mathbb{Q}^{*+}(t_a,t_b,\omega)$ en remplaçcant dans les définitions des ensembles $\mathbb{Q}^*(t_a,t_b,M)$ et $\mathbb{Q}^*(t_a,t_b,\omega)$ les variables $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$ par les variables $(Q^{*+}_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$.

Définition - Problème local de fatigue approché. Le problème est un problème local de fatigue approché du problème posé (P), au point M, sur l'intervalle I, si l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable "pilote" est cyclique, au point M, sur l'intervalle I.

On construit ainsi la suite de la classification à partir des grandeurs locales en utilisant le fait que les composantes $(Q^{*+}_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$ peuvent être périodiques, vérifier les hypothèses (H1) et (H2) et être identiques (entre elles, au niveau local). On définit ainsi 6 classes de problèmes locaux approchés de fatigue allant de la plus générale à la moins générale (P^+P, P^+PI, P^+PM, P^+PMI, P^+PML et P^+PMLI, Tab. 4) identifiée par leur ensemble caractéristique $\mathbb{Q}^{*+}(t_a,t_b,M)$. On a :

- $\mathbb{Q}^{*+}(t_a,t_b,M) = \left\{(Q^{*+}_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$ pour les problèmes locaux de fatigue approchés (quelconques) ;
- $\mathbb{Q}^{*+}(t_a,t_b,M) = \left\{(T[Q^{*+}_{ij}(M,t)](M), Q^{*+}_{ij\,min}(M), Q^{*+}_{ij\,max}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$ pour les problèmes P^+PML ;
- $\mathbb{Q}^{*+}(t_a,t_b,M) = \left\{T[V^{*+}(M,t)](M), V^{*+}_{min}(M), V^{*+}_{max}(M), (\overline{Q^{*+}_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$ pour les problèmes P^+PMLI.

Définition - Problème local approché de fatigue sur un domaine. Le problème posé est un problème local de fatigue approché sur le domaine ω, sur l'intervalle I, si quel que soit le point M de ω, on est en présence d'un problème local de fatigue approché, au point M sur l'intervalle I, pour lequel pour toutes les composantes $Q^{*+}_{ij}(M,t)$, il existe un réel $q^{*+}_{ij}(M)$ et une même fonction $V^{*+(ij)}(\omega,t)$ tels que : $Q^{*+}_{ij}(M,t) = V^{*+(ij)}(\omega,t)q^{*+}_{ij}(M)$.

Problème / $(Q_{ij}^{*+}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$	Périodiques	Hypothèse (H1)	Hypothèse (H2)	Identiques
P$^+$P	X			
P$^+$PI	X			X
P$^+$PM	X	X		
P$^+$PMI	X	X		X
P$^+$PML	X	X	X	
P$^+$PMLI	X	X	X	X

Tab. 4 – Classification des problèmes locaux approchés de fatigue mécanique

On construit, pour terminer, la fin de la classification à partir des grandeurs locales en utilisant le fait que les composantes $V^{*+(ij)}(\omega,t)(i,j) \in \{1,2,3\}^2$ peuvent être périodiques, vérifier les hypothèses (H1) et (H2) et être identiques (entre elles). On définit ainsi 6 classes de problèmes locaux approchés de fatigue sur un domaine allant de la plus générale à la moins générale (P$^+$P(ω), P$^+$PI(ω), P$^+$PM(ω), P$^+$PMI(ω), P$^+$PML(ω) et P$^+$PMLI(ω), Tab. 5) identifiée par leur ensemble caractéristique $\mathbb{Q}^*(t_a,t_b,\omega)$. On a :

- $\mathbb{Q}^{*+}(t_a,t_b,\omega) = \left\{(q_{ij}^{*+}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, (V^{*+(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$ pour les problèmes locaux approchés de fatigue (quelconques) sur un domaine ;
- $\mathbb{Q}^{*+}(t_a,t_b,\omega) = \left\{(q_{ij}^{*+}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, (T[(V^{*+(ij)}(\omega,t)](\omega), V_{min}^{*+(ij)}(\omega), V_{max}^{*+(ij)}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$ pour les problèmes P$^+$PML(ω) ;
- $\mathbb{Q}^{*+}(t_a,t_b,\omega) = \left\{(q_{ij}^{*+}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, T[(V^{*+}(\omega,t)](\omega), V_{min}^{*+}(\omega), V_{max}^{*+}(\omega), (\overline{q_{ij}^{*+}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$ pour les problèmes P$^+$PMLI(ω).

Problème / $V^{*+(ij)}(\omega,t)(i,j) \in \{1,2,3\}^2$	Périodiques	Hypothèse (H1)	Hypothèse (H2)	Identiques
P$^+$P(ω)	X			
P$^+$PI(ω)	X			X
P$^+$PM(ω)	X	X		
P$^+$PMI(ω)	X	X		X
P$^+$PML(ω)	X	X	X	
P$^+$PMLI(ω)	X	X	X	X

Tab. 5 – Classification des problèmes locaux approchés de fatigue mécanique sur un domaine

6 Illustration sur un cas élémentaire

Imaginons que le problème posé soit un problème de type SPMLI et que le matériau constitutif du domaine étudié soit élastique endommageable. Ainsi, pour un état d'endommagement donné, le matériau est élastique (ou hyperélastique, si l'on considère le caractère unilatéral du dommage). On a ainsi : $\mathbb{S}_t(t_a,t_b) = \{T[V(t)], V_{min}, V_{max}, (\overline{s}_\alpha(M))_{\alpha=1,\ldots,n_t}\}$. L'ensemble des opérateurs du problème posé sont linéaires et donc, les solutions sont proportionnelles aux données. Le problème local (approché ou non) peut donc être inscrit dans la classe P$^+$PMLI(Ω) avec :

$$\mathbb{Q}^{*+}(t_a,t_b,\Omega) = \Big\{(q_{ij}^{*+}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, \\ T[(V^{*+}(\Omega,t)](\Omega) = T[V(t)], V_{min}^{*+}(\Omega) = V_{min}, V_{max}^{*+}(\Omega) = V_{max}, (\overline{q_{ij}^{*+}}(\Omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\Big\}$$

Les grandeurs $(q_{ij}^{*+}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$ et $(\overline{q_{ij}^{*+}}(\Omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$ sont constantes dans l'intervalle de temps I et peuvent être obtenues par un unique calcul par Eléments Finis et la loi d'évolution en fatigue doit, pour être la plus fidèle à la réalité, inclure les grandeurs $T[V(t)]$, V_{min} et V_{max}.

7 Conclusion

Les classifications proposées conduites d'abord à l'aide de grandeurs structurales, puis ensuite à l'aide de grandeurs locales, permettent d'identifier clairement les paramètres qui doivent être présents au sein des lois qui gouverneront l'évolution des grandeurs dans le cadre d'un problème fatigue mécanique. Elles induisent ainsi directement les caractéristiques des essais expérimentaux qui doivent être conduits pour identifier ces lois.

Références

[1] C. Bathias, An engineering point of view about fatigue of polymer matrix composite materials, International journal of fatigue, 2006, 28, 1064-1099

[2] J.F. Caron, A. Ehrlacher, Modelling of fatigue microcracking kinetics in crossply and experimental validation, International Conference on fatigue of composites, 1997, Ed. S. Degallaix, C. Bathias R. and Fougères, 378-385

[3] G. Feng, M.D. Gilchrist, J. Kinloch , F.L. Matthews Development of a method for predicting the fatigue life of CFRP components, International Conference on fatigue of composites, 1997, Ed. S. Degallaix, C. Bathias R. and Fougères, 407-414

[4] J.C. Halpin, K.L. Jerina, T.A. Johnson, Characterization of composites for the purpose of reliability evaluation, ASTM STP 521, 1973

[5] C. Henaff-Gardin, M.C. Lafarie-Frenot, I. Goupillaud, Prediction of cracking evolution under uniaxial fatigue loading in cross-ply composite laminates., International Conference on fatigue of composites, 1997, Ed. S. Degallaix, C. Bathias R. and Fougères, 189-196

[6] M. Kawai Damage mechanics for off-axis fatigue behavior of unidirectionnal carbon fiber-reinforced composites at room and high temperatures, International Conference on Composite materials (ICCM12), 1999

[7] K.A. Miner, Cumulative damage in fatigue, Journal of Applied Mechanics, 1945, 67, A159-A164

[8] J. Payan, C. Hochard, Damage modelling of laminated carbon/epoxy composites under static and cyclic loadings, International journal of solids and structures, 2002, 24, 299-306

[9] T.P. Philippidis, A.P. Vassilopoulos, Fatigue of composite laminates under off-axis loading, International Journal of fatigue, 1999, 21, 253-262

[10] A. Sedrakian, T. Ben Zineb, J.L. Billoet, A numerical model of fatigue behaviour for composite plates : application to a three point bending test, International Conference on fatigue of composites, 1997, Ed. S. Degallaix, C. Bathias R. and Fougères, 415-423

[11] M. Shokrieh L. Lessard, Multiaxial fatigue behaviour of unidirectional plies based on uniaxial fatigue experiments - 1. Modelling, International Journal of fatigue, 1997, 19, 201-207

[12] F. Sidoroff, B. Subagio, Fatigue damage modelling of composite materials from bending tests., European Conference on Composite Materials (ECCM2), 1987, 4.32-4.39

[13] R. Talreja, Stiffness properties of composite laminates with matrix cracking and interior delamination, Engineering Fracture Mechanics, 1986, 25, 751-762

[14] Thionnet, A., Chambon, L., Renard, J., "A theoretical and experimental study to point out the notion of loading mode in damage mechanics : Application to the identification and validation of a fatigue damage modelling for laminates composites, International journal of solids and structures, 2002, 24, 147-154

[15] S. Vieillevigne, D. Jeulin, J. Renard, N. Sicot, Modelling of the fatigue behaviour of an unidirectional glass epoxy composite submitted to fatigue loadings, International Conference on fatigue of composites, 1997, Ed. S. Degallaix, C. Bathias R. and Fougères, 424-430